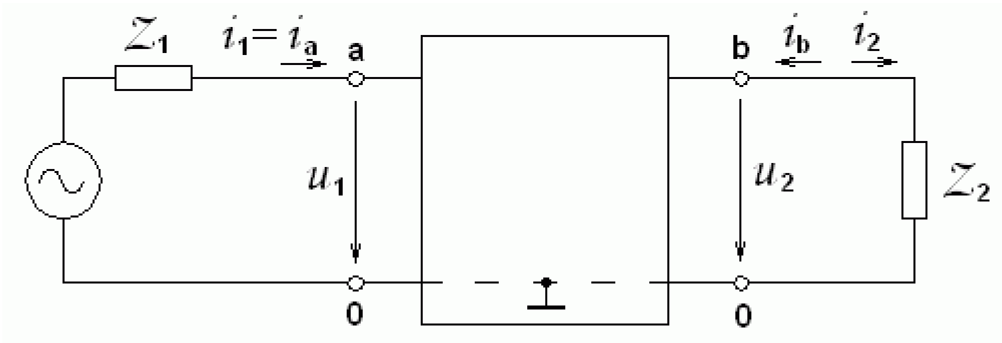
SIGORSKÉHO METÓDA

Úprava zapojenia na dvojbránu (štvorpól)

Vo väčšine prípadov možno elektronické zapojenia znázorniť v tvare štvorpólu/dvojbrány, pričom k dvojici vstupných zvierok sa pripája zdroj signálov a k dvojici výstupných zvierok záťaž. Pritom sa časť uzlov celého zapojenia dostáva do vnútra dvojbrány (tzv. vnútorné uzly), kým ostatné vytvárajú dvojicu zvierok dvojbrány (tzv. vonkajšie uzly).

Uvažujme jednoduchší prípad, keď je jeden z uzlov zapojenia spoločný pre vstup aj výstup a súčasne je aj vzťažným (*Obr. 1*).*



Obr. 1.

Pri výpočte sa zaujímame najmä o základné veličiny ako činiteľ prenosu napätia a prúdu, vstupnú a výstupnú impedanciu. Tieto výrazy možno vyjadriť pomocou determinantu a algebraických doplnkov uvažovaného zapojenia.

V našom prípade, ak je jedným zo vstupných zvierok dvojbrány uzol „a" zapojenia a jeden z výstupných zvierok tvorí zasa uzol „b", vyjadríme zvierkové napätia dvojbrány pomocou uzlových napätí

$$u_1 = u_a \quad ; \quad u_2 = u_b \tag{1}$$

Zložky budiaceho vektora určujeme výlučne z vonkajších prúdov dvojbrány, keďže predpokladáme, že vo vnútri dvojbrány sa nevyskytujú nezávislé zdroje, teda budeme uvažovať

$$i_1 = i_a \quad ; \quad i_2 = -i_b \tag{2}$$

Ostatné zložky budiaceho vektora, ktorých číselné označenie zodpovedá vnútorným uzlom, budú nulové.

Na určenie charakteristík dvojbrány, na ktorú toto zapojenie transformujeme pomocou determinantu matice sústavy, možno považovať známy vzťah

$$u_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n}\Delta_{sk} i_s \tag{3}$$

* Všeobecnejší prípad, ak vstup - výstup nemajú spoločný uzol, je možné nájsť v špeciálnej literatúre.

Poznámka:
Majme sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\
b_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
b_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

Budeme predpokladať, že determinant sústavy sa rovná nule a pokúsime sa vyriešiť sústavu rovníc vzhľadom na nenulové veličiny x_k. Prvú z rovníc vynásobíme algebraickým doplnkom Δ_{1k} prvku a_{1k} determinantu sústavy, druhú rovnicu doplnkom Δ_{2k}, atď. až po poslednú rovnicu. Sumarizovaním všetkých takto získaných rovníc dostávame výraz

$$
b_1\Delta_{1k} + b_2\Delta_{2k} + \cdots + b_n\Delta_{nk} = \sum_{s=1}^{n}\left(a_{1s}\Delta_{1k} + a_{2s}\Delta_{2k} + \cdots + a_{ns}\Delta_{nk}\right)x_s
$$

Ak pre pravú stranu použijeme vzťah

$$
\sum_{r=1}^{n} a_{rs}\Delta_{r\sigma} = \begin{cases} \Delta \text{ pre } s = \sigma \\ 0 \text{ pre } s \neq \sigma \end{cases},
$$

dostávame

$$
b_1\Delta_{1k} + b_2\Delta_{2k} + \cdots + b_n\Delta_{nk} = \Delta x_k,
$$

z čoho vypočítame

$$
x_k = \frac{1}{\Delta}\left(b_1\Delta_{1k} + b_2\Delta_{2k} + \cdots + b_n\Delta_{nk}\right) = \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n}\Delta_{sk}b_s
$$

Keď do rovnice (3) dosadíme zo vzťahu (2) hodnoty nenulových zložiek budiaceho vektora, dostávame

$$
u_k = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{ak}i_a + \Delta_{bk}i_b\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{ak}i_1 - \Delta_{bk}i_2\right)
$$

alebo

$$
u_k = \frac{\Delta_{ak}}{\Delta}i_1 - \frac{\Delta_{bk}}{\Delta}i_2 \tag{4}
$$

Na základe toho vyjadríme aj uzlové napätia $u_a = u_1$ a $u_b = u_2$

$$
\begin{aligned}
u_a &= u_1 = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}i_1 - \frac{\Delta_{ba}}{\Delta}i_2 \\
u_b &= u_2 = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}i_1 - \frac{\Delta_{bb}}{\Delta}i_2
\end{aligned} \tag{5}
$$

Získané rovnice vzájomne zväzujú vonkajšie napätia a prúdy dvojbrány pomocou determinantu Δ admitančnej matice zapojenia a pomocou jeho algebraických doplnkov. Spolu s rovnicou

$$
u_k = Z_2 i_2 \text{ alebo } i_2 = \frac{u_2}{Z_2} \tag{6}
$$

rovnice (5) dovoľujú vyjadriť všetky veličiny charakterizujúce dvojbrány. Dosiahneme to vylúčením dvoch ľubovoľne vybraných veličín z 3 rovníc. Dostávame sa takto k rovnici, v ktorej sú len dve zo štyroch veličín (u_1, u_2, i_1 a i_2).

Dosadením do rovníc (5) za prúd i_2 z (6) dostaneme sústavu

$$u_1 = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta} i_1 - \frac{\Delta_{ba}}{Z_2 \cdot \Delta} u_2 \tag{7}$$

$$u_2 = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} i_1 - \frac{\Delta_{bb}}{Z_2 \cdot \Delta} u_2 \tag{8}$$

Z rovnice (8)

$$u_2 = \frac{Z_2 \cdot \Delta_{ab}}{Z_2 \cdot \Delta + \Delta_{bb}} i_1 \tag{9}$$

a dosadením u_2 do (7) dostaneme

$$u_1 = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta} i_1 - \frac{\Delta_{ba} \cdot \Delta_{ab}}{(Z_2 \cdot \Delta + \Delta_{bb})\Delta} i_1 = \frac{i_1}{\Delta}\left(\Delta_{aa} - \frac{\Delta_{ab} \cdot \Delta_{ba}}{Z_2 \cdot \Delta + \Delta_{bb}} \right)$$

alebo ak výraz v zátvorkách upravíme pre spoločný menovateľ

$$u_1 = \frac{i_1}{\Delta} \cdot \frac{Z_2 \cdot \Delta \cdot \Delta_{aa} + \Delta_{aa} \cdot \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \cdot \Delta_{ba}}{Z_2}$$

V tomto výraze môžeme v súlade s teóriou determinantov namiesto dvoch posledných členov v čitateli použiť súčin determinantu Δ a jeho dvojitého algebraického doplnku* $\Delta_{aa,bb}$ podľa nasledujúceho vzťahu (bez uvádzania dôkazu)

$$\Delta_{aa} \cdot \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \cdot \Delta_{ba} = \Delta \cdot \Delta_{aa,bb}$$

a tým dostaneme

$$u_1 = \frac{Z_2 \cdot \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}}{Z_2 \cdot \Delta + \Delta_{bb}} i_1 \tag{10}$$

Z tohto výrazu môžme okamžite určiť vstupnú impedanciu

$$Z_{in} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{Z_2 \cdot \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}}{Z_2 \cdot \Delta + \Delta_{bb}} \tag{11}$$

Pri chode naprázdno ($Z_2 = \infty$) alebo ak Z_2 je zahrnutá do celkovej matice, tento výraz nadobúda tvar

$$Z_{in}^P \Big|_{Z_2=\infty} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta} \tag{12}$$

V stave nakrátko ($Z_2 = 0$) vyjadríme vstupnú impedanciu

$$Z_{in}^P \Big|_{Z_2=0} = \frac{\Delta_{aa,bb}}{\Delta_{bb}} \tag{13}$$

Činiteľ prenosu (napäťové zosilnenie) získame z rovníc (9) a (10)

$$A_u = \frac{u_2}{u_1} = \frac{Z_2 \cdot \Delta_{ab}}{Z_2 \cdot \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}} \tag{14}$$

V stave naprázdno ($Z_2 = \infty$) tento výraz sa zjednoduší

$$A_u = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \tag{15}$$

Ak dosadíme do rovnice (9) $u_2 = Z_2\, i_2$, dostaneme činiteľ prenosu prúdu (prúdové zosilnenie)

$$A_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{\Delta_{ab}}{Z_2 \cdot \Delta + \Delta_{bb}} \tag{16}$$

---

* Dvojitý algebraický doplnok $\Delta_{ac,cd}$ získame z determinantu Δ vyškrtnutím riadkov a,c a stľpcov b,d. Znamienko sa určuje pomocou súčiniteľa $(-1)^{\sigma+\kappa}$ kde σ znamená súčet čísiel všetkých vyškrtnutých riadkov a stĺpcov, κ je počet inverzií v postupnostiach prvých a druhých indexov

Pri skratovanom výstupe ($Z_2 = 0$) dostaneme

$$A_i^k\Big|_{Z_2=0} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{bb}} \tag{17}$$

Inokedy ešte používame také veličiny ako prenosová impedancia

$$P_i = \frac{u_2}{i_1} = \frac{Z_2 \cdot \Delta_{ab}}{Z_2 \cdot \Delta + \Delta_{bb}} \tag{18}$$

a tiež prenosovú admitanciu

$$P_a = \frac{\Delta_{ab}}{Z_2 \cdot \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}} \tag{19}$$

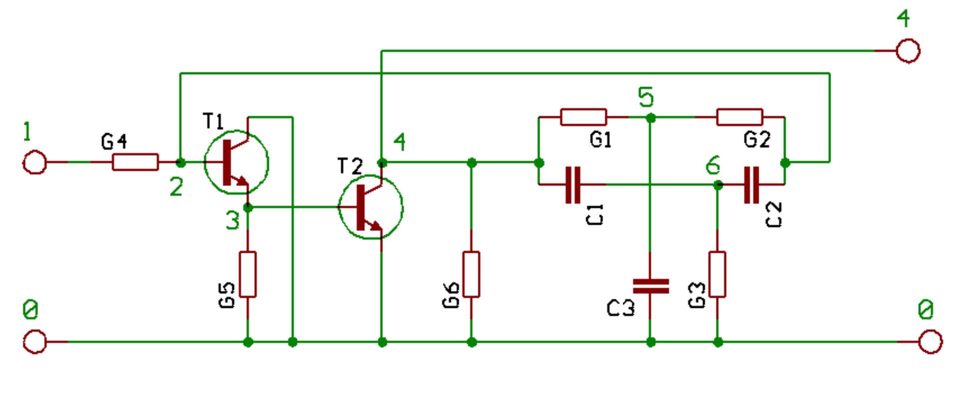
Výstupnú impedanciu určujeme z pomeru napätia a prúdu na výstupe, pritom však predpokladáme, že záťaž je odpojená a signál na vstupe je nulový. Dosadením za $i_1 = -u_1/Z_1$ do rovnice (5) dostávame

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\Delta_{aa}}{Z_1\Delta}u_1 - \frac{\Delta_{ba}}{\Delta}i_2 \\ u_2 &= -\frac{\Delta_{aa}}{Z_1\Delta}u_1 - \frac{\Delta_{bb}}{\Delta}i_2 \end{aligned} \tag{20}$$

Eliminovaním u_1 z týchto rovníc a po úprave dostaneme výraz pre výstupnú impedanciu

$$Z_o = -\frac{u_2}{i_2} = \frac{Z_1 \cdot \Delta_{bb} + \Delta_{aa,bb}}{Z_1 \cdot \Delta + \Delta_{aa}} \tag{21}$$

Príklad zostavenia admitančnej matice zapojenia selektívneho tranzistorového zosilňovača



Obr. 2. Schéma selektívneho tranzistorového zosilňovača

Na *obr. 2* Je znázornená náhradná schéma zosilňovača s dvojitým T-článkom. Vzťažný uzol si označme „0“ a v súlade s vyššie uvedenými pravidlami zostavíme admitančnú maticu (voľba vzťažného bodu zjednodušuje admitančnú maticu)

	1	2	3	4	5	6
1	G_4	$-G_4$				
2	$-G_4$	$G_2 + G_4 + j\omega C_2$			$-G_2$	$-j\omega C_2$
3			G_5			
4				$G_1 + G_6 + j\omega C_1$	$-G_1$	$- j\omega C_1$
5		$-G_2$		$-G_1$	$G_1 + G_2 + j\omega C_3$	
6		$- j\omega C_2$		$- j\omega C_1$		$G_3 + j\omega(C_1 + C_2)$

Pre tranzistor T_1

		(b)	(k)	(e)	
	2	$Y_{11e}^{(1)}$	$Y_{12e}^{(1)}$	$-(Y_{11e}^{(1)} + Y_{12e}^{(1)})$	(b)
$[Y]^{T1}=$	0	$Y_{21e}^{(1)}$	$Y_{22e}^{(1)}$	$-(Y_{21e}^{(1)} + Y_{22e}^{(1)})$	(k)
	3	$-(Y_{11e}^{(1)} + Y_{21e}^{(1)})$	$-(Y_{12e}^{(1)} + Y_{22e}^{(1)})$	$-(Y_{11e}^{(1)} + Y_{12e}^{(1)} + Y_{21e}^{(1)} + Y_{22e}^{(1)})$	(e)
		2	0	3	

a pre tranzistor T_2

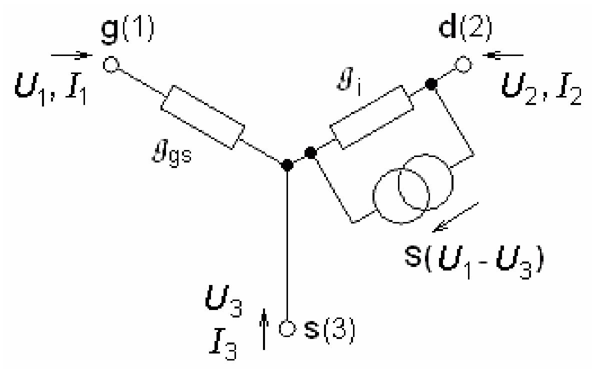
		(b)	(k)	(e)	
	3	$Y_{11e}^{(2)}$	$Y_{12e}^{(2)}$	$-(Y_{11e}^{(2)} + Y_{12e}^{(2)})$	(b)
$[Y]^{T2}=$	4	$Y_{21e}^{(2)}$	$Y_{22e}^{(2)}$	$-(Y_{21e}^{(2)} + Y_{22e}^{(2)})$	(k)
	0	$-(Y_{11e}^{(2)} + Y_{21e}^{(2)})$	$-(Y_{12e}^{(2)} + Y_{22e}^{(2)})$	$-(Y_{11e}^{(2)} + Y_{12e}^{(2)} + Y_{21e}^{(2)} + Y_{22e}^{(2)})$	(e)
		3	4	0	

Výslednú maticu získame sčítaním všetkých predchádzajúcich.

	1	2	3	4	5	6
1	G_4	$-G_4$				
2	$-G_4$	$G_2 + G_4 + j\omega C_2 + Y_{11e}^1$	$-Y_{11e}^1 - Y_{12e}^1$		$-G_2$	$-j\omega C_2$
3		$-Y_{11e}^1 - Y_{21e}^1$	$G_5 - \Sigma Y^1 + Y_{11e}^1$	Y_{12e}^1		
4			$+ Y_{21e}^2$	$G_1 + G_6 + j\omega C_1 + Y_{22e}^2$	$-G_1$	$- j\omega C_1$
5		$-G_2$		$-G_1$	$G_1 + G_2 + j\omega C_3$	
6		$- j\omega C_2$		$- j\omega C_1$		$G_3 + j\omega(C_1 + C_2)$

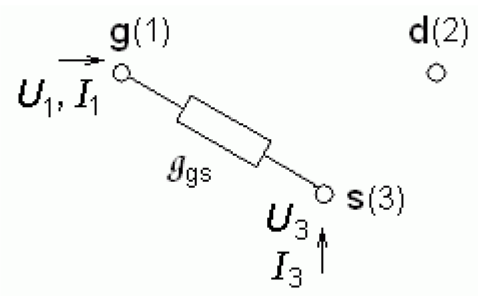
Neurčitá (úplná) admitančná matica aktívneho 3-pólového prvku

Majme univerzálny 3-pólový aktívny prvok reprezentovaný jeho nízkofrekvenčným prvkom v tvare:



Obr. 3. Nízkofrekvenčný obvodový model 3-pólového prvku

Spôsob zostavenia neurčitej (úplnej) admitančnej matice je nasledovný: pre každý z troch prvkov g_{gs}, g_i a riadený prúdový zdroj zostavíme neurčitú admitančnú maticu a použijúc princíp superpozície tieto matice sčítame, čím dostaneme výsledný matematický model daného aktívneho prvku.



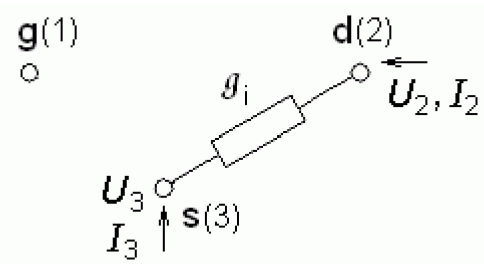
$[Y]_{ggs}=$

U_1	U_3	U_3	
g_{gs}	0	$-g_{gs}$	I_1
0	0	0	I_2
$-g_{gs}$	0	g_{gs}	I_3

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=U_3=0} = Y_{33} = \left.\frac{I_3}{U_3}\right|_{U_1=U_2=0}$$

$$Y_{13} = \left.\frac{I_1}{U_3}\right|_{U_1=U_2=0} = Y_{31} = \left.\frac{I_3}{U_1}\right|_{U_2=U_3=0}$$

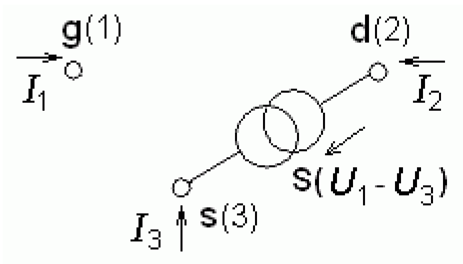
Analogicky budeme postupovať pre admitanciu g_i .



$[Y]_{gi}=$

U_1	U_3	U_3	
0	0	0	I_1
0	g_i	$-g_i$	I_2
0	$-g_i$	g_i	I_3

V prípade riadeného zdroja musíme postupovať opatrnejšie



	U_1	U_3	U_3	
	0	0	0	I_1
$[Y]_S=$	S	0	-S	I_2
	-S	0	S	I_3

$$Y_{33} = \left.\frac{I_3}{U_3}\right|_{U_1=U_2=0} = \frac{S \cdot U_3}{U_3} = S$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=U_3=0} = \frac{S \cdot 0}{U_2} = 0$$ (prúdový zdroj dodáva nulový prúd)

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=U_3=0} = 0\,,$$

pretože $I_1 = 0$ a preto aj $I_{12} = I_{13} = 0$. Keďže vieme, že súčty admitancií v každom riadku a každom stĺpci sú rovné nule, môžeme vykonať toto doplnenie. Samozrejme, môžeme sa o tomto presvedčiť aj z definície parametrov, napríklad

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=U_3=0} = \frac{S \cdot U_1}{U_1} = S\,.$$

Spomínaná opatrnosť je kvôli orientácii prúdov.